

5. cvičení - teorie

Definice. Necht' $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k + 1$ nazýváme *celou částí* čísla x a značíme $\lfloor x \rfloor$ nebo $[x]$.

Definice. Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že L je *vlastní limita posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (resp. } < K \text{)}.$$

Limity jsou jednoznačně určeny.

Věta 2.3 (limita podposloupnosti). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel s limitou $A \in \mathbb{R}$. Buď posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom už $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$.

Věta 2.8 (VoAL) (Aritmetika limit). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a mějme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, máli pravá strana smysl.

Věta 2.7 (Dva strážníci). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}^*$,

potom je $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

Věta 2.5 (0· omezená). Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

potom je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Věta 2.9 ($\frac{\pm}{0+}$). Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $b_n > 0$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Věta (O posloupnosti s kladnými členy). Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = A$, (nelze použít u zkoušky)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, (nelze použít u zkoušky)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^m = A^m \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$ pro $m \in \mathbb{N}$.

Růstová škála

$$\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n, \text{ kde } a > 1, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$$

Vzorce

- $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1}) = (A - B) \left(\sum_{k=1}^n A^{n-k} B^{k-1} \right)$
- $(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \dots + B^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$
- $a_k = a_1 + (k-1)d \implies \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ (aritmetická řada)
- $\sum_{k=1}^n a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ pro $q > 0$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (2. cv.)
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

Odhady

- $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (viz cv. 4 př. 5)
- $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$
- $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$

Limity

- platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ pro $a > 1$ (viz cv. 4 př. 5)
- platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ pro $a \in (0, 1)$ (viz cv. 4 př. 5)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$ (viz cv. 4 př. 5)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $a > b > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^b + b^n} = a$